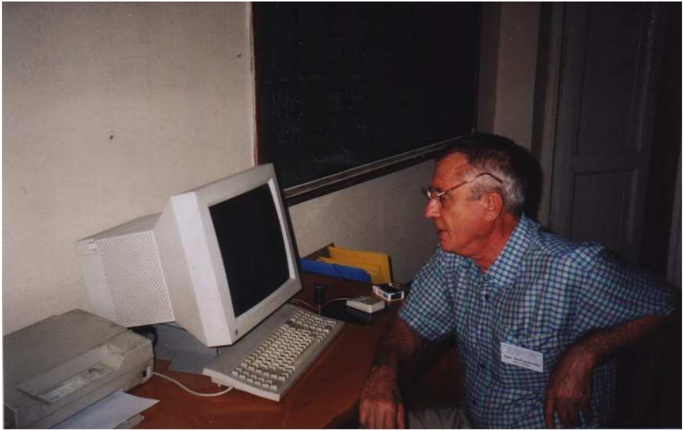
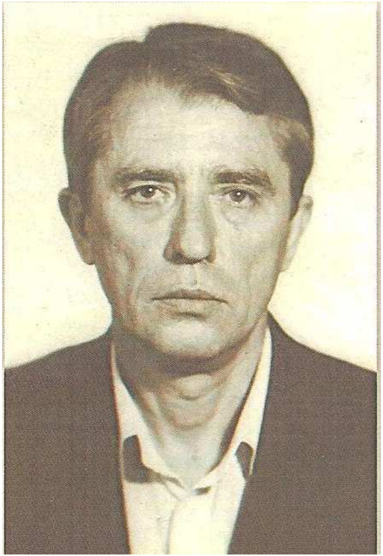


И.П. Мельниченко и геометрическая теория функций комплексного переменного



(1938-2004)

Анапа, сентябрь, 1974 г.

1. Пространство $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ – сфера Римана (расширенная комплексная плоскость).
Как известно [1 – 3], комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ является линейным векторным пространством над полем комплексных чисел с эрмитовым скалярным произведением

$$(\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W}) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k, \qquad (1)$$

где $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

2. Алгебра $\mathbb{C}^n$.

Бинарную операцию действующую из $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$

по правилу

$$\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W} = \{z_k w_k\}_{k=1}^n, \tag{2}$$

где $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, будем называть векторным умножением элементов $\mathbb{C}^n$.

Данная операция превращает $\mathbb{C}^n$ в коммутативную, ассоциативную алгебру [7, 8] с единицей $1 = \underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{n-\text{раз}} \in \mathbb{C}^n$.

Обратимыми, относительно так определенной операции

умножения, являются те и только те елементы $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ у которых $z_k \neq 0$ для всех $k = \overline{1, n}$.

Обратными для таких элементов $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n$

являются элементы $\mathbb{Z}^{-1} = \{z_k^{-1}\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, так как $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}^{-1} = \mathbb{Z}^{-1} \cdot \mathbb{Z} = 1$.

Множество Θ всех элементов $a = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, у которых хотя бы одна координата $a_k = 0$, назовем множеством необратимых элементов $a \in \mathbb{C}^n$. Множество Θ является идеалом в алгебре $\mathbb{C}^n$. При $n = 1$ равенство (2) задает обычное умножение комплексных чисел.

Хорошо известно (см. напр [7, стр. 138], [8, стр. 345]), что операция умножения (2) позволяет представить $\mathbb{C}^n$ как прямую сумму n экземпляров алгебры комплексных чисел $\mathbb{C}$. Структура векторного пространства $\mathbb{C}^n$ полностью согласуется со структурой алгебры $\mathbb{C}^n$.

Дадим несколько определений превращающих алгебру $\mathbb{C}^n$ в алгебру со свойствами аналогичными свойствам алгебры обычных комплексных чисел.

3. Сопряжение.

В алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$ важную роль имеет понятие комплексно сопряженного числа. Предьявим аналогичный обьект в алгебре $\mathbb{C}^n$.

Каждому элементу $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ поставим

в соответствие векторно – сопряженный элемент $\overline{\mathbb{W}} = \{\overline{w}_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, где $\overline{w}_k$ обозначает число комплексно сопряженное w_k в обычном смысле.

Так определенное соответствие задает автоморфизм $\mathbb{C}^n$, оставляющий неподвижным подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. При $n = 1$ векторно – сопряженное число совпадает с комплексно сопряженным.

4. Модуль (векторный).

В алгебре $\mathbb{C}$ одним из важнейших является понятие модуля комплексного числа. Следующее определение дает аналог этого понятие в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\mathbb{R}_+^n = R_+ \times R_+ \times \ldots \times R_+$, $R_+ = [0, +\infty)$ (см. [2, стр. 16]).

Векторным модулем произвольного элемента

$\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ будем называть вектор $|\mathbb{Z}| := \{|z_k|\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}_+^n$.

Операция перехода к векторному модулю определяет отображение $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{R}_+^n$. Это отображение в комплексном анализе используется, в частности, для получения изображения Реинхарта областей в $\mathbb{C}^n$ (см., например [2, стр. 16]).

Важно, что для произвольного $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$, справедливо равенство

$$\mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{Z}} = |\overline{\mathbb{Z}}|^2 = |\mathbb{Z}|^2. \tag{3}$$

При $n = 1$ векторный модуль совпадает с обычным модулем комплексного числа, формула (3) совпадает с аналогичной формулой для комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определяемой с помощью скалярного произведения (1).

5. Векторная норма.

Вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ будем называть

неотрицательным (строго положительным) и писать $\mathbb{X} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} > \mathbb{O}$), если $x_k \geq 0$ для всех $k = \overline{1,n}$ ($x_k > 0$ хотя бы для одного $k = \overline{1,n}$), $\mathbb{O} = \underbrace{(0,0,\ldots 0)}_{n-\text{раз}}$.

Будем говорить, что вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ больше либо

равен (строго больше) вектора $\mathbb{Y} = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, если $\mathbb{X} - \mathbb{Y} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} - \mathbb{Y} > \mathbb{O}$).

Данные определения при $n = 1$ совпадают с соответствующими определениями на вещественной прямой.

При $n > 1$ ситуация существенно отличается от случая $n = 1$, например, вектор $\mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \ldots 0)}_{n-\text{раз}}$ больше либо равен всех векторов, все координаты которых неположительны и меньше либо равен всех векторов из $\mathbb{R}^n_+$. Остальные векторы $\mathbb{R}^n$ у которых координаты разных знаков с вектором $\mathbb{O}$ не сравнимы в смысле этих определений.

Векторное пространство $\mathbb{Y}$ будем называть векторно нормированным,

если каждому $y \in \mathbb{Y}$ сопоставлен неотрицательный вектор $\|y\| \in \mathbb{R}^n_+$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющий условиям:
1) $\|y\| \geq \mathbb{O}$, причем $\|y\| = \mathbb{O} \Longleftrightarrow y = 0_{\mathbb{Y}}$, ($0_{\mathbb{Y}}$ – нуль пространства $\mathbb{Y}$);
2) $\|\gamma y\| = |\gamma| \|y\|$, $\forall y \in \mathbb{Y}$, $\forall \gamma \in \mathbb{C}$;
3) $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$.

Аналогично можно ввести понятие векторной метрики. Введенное ранее понятие векторного модуля элемента $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяет последнему определению. Таким образом векторный модуль является векторной нормой в алгебре $\mathbb{C}^n : \|\cdot\| = |\cdot|$. Тогда открытым единичным шаром в алгебре $\mathbb{C}^n$ является единичный открытый поликруг $\|z\| < 1$, $(1 = \underbrace{(1, 1, \ldots 1)}_{n-\text{раз}})$, а единичной сферой – n – мерный тор – $\mathbb{T}^n = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbb{Z}\| = 1\}$. Очень важно, что

а) $|\mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2| = \|\mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{Z}_2\| = \|\mathbb{Z}_1\|\|\mathbb{Z}_2\| = |\mathbb{Z}_1||\mathbb{Z}_2|$, $\forall \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2 \in \mathbb{C}^n$;

б) $|1| = \|1\| = 1$, $(1 = (1, 1, \ldots, 1))$.

При $n = 1$ равенства а) и б) совпадают с аналогичными равенствами на комплексной плоскости. Заметим, что для евклидовой нормы $\|\cdot\|_E$, определяемой скалярным произведением (1) справедливо равенство

$$\|1\|_E = \sqrt{n}.$$

6. Векторный аргумент $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$.

В дальнейшем вектор (произвольный) пространства (алгебры) $\mathbb{C}^n$ будем называть n – мерным комплексным числом. Таким образом, алгебра $\mathbb{C}^n$ будет называться алгеброй n – мерных комплексных чисел.

Векторным аргументом n – мерного комплексного числа $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n \backslash \Theta$

является n – мерный вещественный вектор, определяемый формулой

$$Arg\,\mathbb{A} = \{Arg\,a_k\}_{k=1}^n, \tag{4}$$

где $Arg\,a_k$ есть главное значение аргумента, либо то которое вытекает из конкретного смысла задачи в которой фигурирует n – мерное комплексное число $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^n$.

7. Представление n – мерного комплексного числа в векторно – декартовой форме.

Пусть $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n = \{Rez_k + iImz_k\}_{k=1}^n = \{Rez_k\}_{k=1}^n + \{iImz_k\}_{k=1}^n =$$

$$= \{Rez_k\}_{k=1}^n + i\{Imz_k\}_{k=1}^n = Re\mathbb{Z} + iIm\mathbb{Z} = X + iY =$$

$$= \{x_k\}_{k=1}^n + i\{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n,$$

где $X = Re\mathbb{Z} = \{Rez_k\}_{k=1}^n = \{x_k\}_{k=1}^n$,
$Y = Im\mathbb{Z} = \{Imz_k\}_{k=1}^n = \{y_k\}_{k=1}^n$. То есть $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$.

8. Представление n – мерного комплексного числа в векторно – полярной форме.

Используя вышеприведенные определения, получим цепочку равенств:

$$\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|e^{i\alpha_1} \\ |z_2|e^{i\alpha_2} \\ \vdots \\ |z_n|e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1| \\ |z_2| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} \\ e^{i\alpha_2} \\ \vdots \\ e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} =$$

$$= |\mathbb{Z}| \left[\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \vdots \\ \cos\alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \\ \vdots \\ \sin\alpha_n \end{pmatrix} \right] = |\mathbb{Z}| \left[\cos Arg\ \mathbb{Z} + i \sin Arg\ \mathbb{Z}\right] =$$

$$= |\mathbb{Z}| e^{iArg\ \mathbb{Z}} = |\mathbb{Z}| \exp iArg\ \mathbb{Z},$$

где

$$\cos\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \\ \cos\beta_2 \\ \vdots \\ \cos\beta_n \end{pmatrix}, \quad \sin\beta = \begin{pmatrix} \sin\beta_1 \\ \sin\beta_2 \\ \vdots \\ \sin\beta_n \end{pmatrix},$$

$$\exp i\beta = \begin{pmatrix} \exp i\beta_1 \\ \exp i\beta_2 \\ \vdots \\ \exp i\beta_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Аналогичным образом определяется отображение $\ln \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n \setminus \Theta$

$$\ln \mathbb{Z} = \ln |\mathbb{Z}| + iArg\, \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \ln |z_1| + iArg\, z_1 \\ \ln |z_2| + iArg\, z_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \ln |z_n| + iArg\, z_n \end{pmatrix}.$$

Более того, для регулярной в областях $(B_1, B_2, \dots, B_n)$, $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ функции $F(z)$ комплексного переменного определим продолжение этой функции до голоморфного отображения области $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ по следующему правилу

$$\mathbb{F}(\mathbb{W}) = \begin{pmatrix} F(W_1) \\ F(W_2) \\ \dots \\ F(W_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{W} \in \mathbb{B}.$$

9. Компактификация $\mathbb{C}^n$.

По определению $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C})}_{n-\text{раз}}$. Рассмотрим компактификацию пространства $\mathbb{C}^n$, далее так называемое пространство теории функций (см., напр [1 – 3]) $\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n-\text{раз}}$. Ясно, что $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$.

Бесконечными точками $\overline{\mathbb{C}}^n$ являются те точки, у которых хотя бы одна координата бесконечна. Множество всех бесконечных точек имеет комплексную размерность $n-1$. Топология в $\overline{\mathbb{C}}^n$ вводится как в декартовом произведении топологических пространств. В этой топологии $\overline{\mathbb{C}}^n$ компактно (см. [1 – 3]).

10. Полицилиндрическая теорема Римана об отображении в $\overline{\mathbb{C}}^n$.

Область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется областью гиперболического типа,

если ∂B (граница B) – связное множество, содержащее более одной точки.
Область $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, где каждая область $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$ является областью гиперболического типа, будем называть полицилиндрической областью гиперболического типа.

Непосредственно из классической теоремы Римана об отображении односвязной области гиперболического типа на единичный круг (см. [6]) вытекает следующий результат.

Теорема Римана (полицилиндрическая).

Любая полицилиндрическая область $\mathbb{B} \subset \overline{\mathbb{C}}^n$ гиперболического типа биголоморфно эквивалентна единичному поликругу $\mathbb{U}^n = \{\mathbb{W} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbb{W}\| < 1\}$. Эту эквивалентность реализует семейство биголоморфных отображений, зависящее от $3 \cdot n$ вещественных параметров.

Пусть $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ – область указанная в теореме Римана, $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{B}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$ и $w_k = f_k(z_k)$ – голоморфная в B_k функция, однолистно и конформно отображающая область B_k, $k = \overline{1,n}$ на единичный круг $|w_k| < 1$ так, что $f(a_k) = 0$, $f'(a_k) > 0$. Тогда биголоморфное отображение $\mathbb{F}_{\mathbb{B}}(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_2) \\ \ldots \\ f_n(z_n) \end{pmatrix}$, $\mathbb{F}'_{\mathbb{B}}(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \ldots \\ f'_n \end{pmatrix}$, удовлетворяет условиям нормировки

$$\mathbb{F}_{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) = \mathbb{O}, \quad \mathbb{F}'_{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} f'_1(a_1) \\ f'_2(a_2) \\ \dots \\ f'_n(a_n) \end{pmatrix} > \mathbb{O}$$

и будет единственним таким отображением на единичный поликруг. Итак, в алгебре $\mathbb{C}^n$ норма определена равенством $\|\mathbb{Z}\| := |\mathbb{Z}|$. Метрика (векторная) в $\mathbb{C}^n$ задается обычным образом: $\rho(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) = \|\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2\|$. Назовем так определенные (векторные) норму и метрику полицилиндрическими. Сходимость по полицилиндрической норме задается соотношением $\mathbb{Z}_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \|\mathbb{Z}_p\| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \dots 0)}_{n-\text{раз}} \Longleftrightarrow$

$$|z_p^{(k)}| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall k = \overline{1, n}.$$

11. Дифференцируемость.

Рассмотрим область $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ и отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $\mathbb{F} = \{f_k(z_1, \ldots, z_n)\}_{k=1}^m$. Пусть $f_k = U^{(k)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + iV^{(k)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ – вещественно дифференцируемы всюду в области $\mathbb{D}$ при $k = \overline{1,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим матрицу Якоби отображения $\mathbb{F}$, рассматриваемого как дифференцируемое отображение области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^{2m}$ (матрица $2m \times 2n$)

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
U_{x_1}^{(1)} & \dots & U_{x_n}^{(1)} & U_{y_1}^{(1)} & \dots & U_{y_n}^{(1)} \\
\multicolumn{3}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
\vdots & \{\mathbb{U}_{\mathbb{X}}\} & \vdots & \vdots & \{\mathbb{U}_{\mathbb{Y}}\} & \vdots \\
\multicolumn{3}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
U_{x_1}^{(m)} & \dots & U_{x_n}^{(m)} & U_{y_1}^{(m)} & \dots & U_{y_n}^{(m)} \\
- - - & - - - & - - - & - - - & - - - & - - - \\
V_{x_1}^{(1)} & \dots & V_{x_n}^{(1)} & V_{y_1}^{(1)} & \dots & V_{y_n}^{(1)} \\
\multicolumn{3}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
\vdots & \{\mathbb{V}_{\mathbb{X}}\} & \vdots & \vdots & \{\mathbb{V}_{\mathbb{Y}}\} & \vdots \\
\multicolumn{3}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
V_{x_1}^{(m)} & \dots & V_{x_n}^{(m)} & V_{y_1}^{(m)} & \dots & V_{y_n}^{(m)}
\end{array}\right), \qquad (5)
$$

где $U_{x_j}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_j} U_k$, $V_{x_j}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_j} V_k$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Штрихованные линии разбивают матрицу Якоби (5) на четыри прямоугольные матрицы порядка $m \times n$, обозначенные $\mathbb{U}_{\mathbb{X}}$, $\mathbb{U}_{\mathbb{Y}}$, $\mathbb{V}_{\mathbb{X}}$, $\mathbb{V}_{\mathbb{Y}}$, где $\mathbb{F} = Re\mathbb{F} + iIm\mathbb{F} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, $\mathbb{Z} = Re\mathbb{Z} + iIm\mathbb{Z} = \mathbb{X} + i\mathbb{Y}$.
С учетом сказанного, матрицу (5) можно представить следующим образом

$$\begin{pmatrix} \mathbb{U}_{\mathbb{X}} & \mathbb{U}_{\mathbb{Y}} \\ \mathbb{V}_{\mathbb{X}} & \mathbb{V}_{\mathbb{Y}} \end{pmatrix}.$$

Тогда условия Коши-Римана для отображения $\mathbb{F}$ можно записать в виде

$$\begin{cases} \mathbb{U}_{\mathbb{X}} = \mathbb{V}_{\mathbb{Y}}, \\ \mathbb{U}_{\mathbb{Y}} = -\mathbb{V}_{\mathbb{X}}. \end{cases} \tag{6}$$

С учетом (6) известное определение голоморфного отображения (см. [1 – 5]) можно представить в следующем виде.

Отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^m$ вещественно дифференцируемое в

$\mathbb{D}$ (как отображение из $\mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^{2m}$) и удовлетворяющее матричному уравнению (6) всюду в $\mathbb{D}$ будем называть голоморфным в области $\mathbb{D}$. При $n \in \mathbb{N}$ и $m = 1$ получаем определение голоморфной функции в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$. В случае $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ получаем определение голоморфной кривой.

Как известно [1 – 3] голоморфное отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^m$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ называется биголоморфным, если оно имеет обратное отображение, голоморфное в области $\mathbb{F}(\mathbb{D})$.

12. Приложения.

В связи с полицилиндрической теоремой Римана об отображении рассмотрим полицилиндрический аналог известного класса S из теории однолистных функций (см., напр. [6]).

Классом $\mathbb{S}^{(n)}$

назовем совокупность всех биголоморфных отображений единичного поликруга $\mathbb{U}^n = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbb{Z}\| < 1\}$ вида

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_2) \\ \dots \\ f_n(z_n) \end{pmatrix}, \text{ где } f_k \in S,\ k = \overline{1,n},\ \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{U}^n.$$

Ясно, что для $\mathbb{Z} \in \overline{\mathbb{U}}^n(r) := \{\|\mathbb{Z}\| \le r < 1\}$, $r = \{r_k\}_{k=1}^n$, $0 < r_k < 1$, $k = \overline{1,n}$ равномерно и абсолютно сходится ряд

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{A}_k \mathbb{Z}^k = \sum \begin{pmatrix} a_k^{(1)} \\ a_k^{(2)} \\ \vdots \\ a_k^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \sum a_k^{(1)} z_1^k \\ \sum a_k^{(2)} z_2^k \\ \vdots \\ \sum a_k^{(n)} z_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_2) \\ \dots \\ f_n(z_n) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.

Для произвольного отображения $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(n)}$ справедливо неравенство

$$\frac{\|\mathbb{Z}\|}{(1+\|\mathbb{Z}\|)^2} \leq \|\mathbb{F}(\mathbb{Z})\| \leq \frac{\|\mathbb{Z}\|}{(1-\|\mathbb{Z}\|)^2},$$

где $\|\mathbb{Z}\| = r = \{|z_k|\}_{k=1}^n = \{|r_k|\} \in \mathbb{R}_+^n, \quad 0 \leq r_k < 1, \quad k = \overline{1,n}.$

Теорема 2.

Для произвольного отображения $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(n)}$ справедливо неравенство

$$\frac{\|1-\mathbb{Z}\|}{(1+\|\mathbb{Z}\|)^3} \leq \|\mathbb{F}'(\mathbb{Z})\| \leq \frac{\|1+\mathbb{Z}\|}{(1-\|\mathbb{Z}\|)^3},$$

где $\|\mathbb{Z}\| = r = \{|z_k|\}_{k=1}^n = \{|r_k|\} \in \mathbb{R}_+^n, \quad 0 \leq r_k < 1, \quad k = \overline{1,n}.$

Литература

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, Ч. I. – М.:«Наука», 1976. – 320 с.
2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, Ч. II. – М.:«Наука», 1976. – 400 с.
3. Фукс Б. В. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1962. – 420 с.
4. Фукс Б. В. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1963. – 428 с.
5. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. – М.:«Наука», 1985. – 272 с.

6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: «Наука», 1966. – 628 с.
7. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. – М.:«Наука», 1973. – 143 с.
8. Б. Л. ван дер ВАРДЕН. Алгебра – М.:«Наука», 1976. – 648 с.
9. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства, – М.:«Наука». – 1969. – 432 с.
10. Пешкичев Ю. А. Многомерный градиент и квазиконформные отображения // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев:«Наукова думка», 1978. – с. 99 – 109.
11. Рудин У. Функциональный анализ, – Изд. "Мир Москва. – 1975. – 449 с.
12. Бахтин А.К. Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства// Доп. НАН України. – 2011. – № 3. – С. 7 – 11.